150

Exemples d'actions de groupes sur des espaces de matrices.

Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif et $n, m \in \mathbb{N}^*$.

I] Action de $GL_n(\mathbb{K})$ sur $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ par translation

1] Définitions et matrices élémentaires

VI.1 [Rom]

Définition/Théorème 1 : l'application $\begin{array}{l} GL_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K}) \\ (P\ ;\ A) \longmapsto P.A = PA \end{array}$ (resp. $\begin{array}{l} GL_m(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K}) \\ (P\ ;\ A) \longmapsto P.A = AP^{-1} \end{array}$) définit une action de $GL_n(\mathbb{K})$ (resp. $GL_m(\mathbb{K})$) sur $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ appelée action de translation à gauche (resp. à droite). Deux matrices sont dans la même orbite si et seulement si elles ont même noyau (resp. même image).

Définition 2 : On appelle matrice de transvection toute matrice de la forme $T_{i,j}(\lambda) = I_n + \lambda E_{i,j} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $1 \leq i \neq j \leq n$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On appelle matrice de dilatation $D_i(\lambda) = I_n + (\lambda - 1) E_{i,i} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Théorème 3 : Soit $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$

Alors : (1) La multiplication à gauche (resp. droite) par $D_i(\lambda)$ a pour effet de multiplier la ligne (resp. colonne) i par λ.

(2) La multiplication à gauche (resp. droite) par $T_{i,j}(\lambda)$ a pour effet de remplacer la ligne (resp. colonne) L_i (resp. C_j) par $L_i + \lambda L_j$ (resp. $C_j + \lambda C_i$).

Exemple 4 : La matrice $D_j(-1) T_{i,j}(1) T_{j,i}(-1) T_{i,j}(1)$ est la matrice de permutation qui se déduit de la matrice I_n en permutant ses colonnes i et j. Elle s'écrit plus simplement : $P_{i,j} = I_n - (E_{i,i} + E_{j,j}) + (E_{i,j} + E_{j,i})$

2] Caractérisation

VI.1 [Rom]

Lemme 5 : Soit $A = (a_{i,j})_{i \in [\![1;n]\!], j \in [\![1;m]\!]} \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$

Alors : il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ produit de matrices de transposition et de transvection telle que $PA = \begin{pmatrix} a_{1,1}^{(1)} & a_{1,2}^{(1)} & \cdots & a_{1,m}^{(1)} \\ 0 & a_{2,2}^{(1)} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & a_{n,2}^{(1)} & \cdots & a_{n,m}^{(1)} \end{pmatrix}$

VI.1

Théorème 6 : Soit $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$

Alors : il existe une matrice $P \in GL_n(\mathbb{K})$ produit de matrices de permutation et de transvection telle que PA soit échelonnée par lignes. Cette matrice PA est dans l'orbite de A pour l'action par translation à gauche.

[Rom]

Proposition 7 : Soit $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$

Alors : l'algorithme du pivot de Gauss est :

(1) trouver $i \in [\![1;n]\!]$ tel que $a_{i,1} \neq 0$. On fait agir $P_{1,i}$ sur A

(2) on élimine les coefficients de la première colonne en faisant agir $T_{i,1}\left(-\frac{a_{i,1}}{a_{1,1}}\right)$ pour tout $i \in [\![1;n]\!]$

(3) on répète le processus avec la sous-matrice $A^{(1)} = \begin{pmatrix} a_{2,2}^{(1)} & \cdots & a_{2,m}^{(1)} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,2}^{(1)} & \cdots & a_{n,m}^{(1)} \end{pmatrix}$ pour obtenir P du théorème précédent

Remarque 8 : On obtient un représentant simple de l'orbite de A qui permet de résoudre plus facilement les systèmes $Ax = b$.

Remarque 9 : On dit que le noyau et l'image sont des invariants totaux pour l'action par translation à gauche et à droite respectivement.

Théorème 10 : Toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (resp. $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$) peut s'écrire $A = \Omega S$ avec $\Omega \in O_n(\mathbb{R})$, $S \in S_n^+(\mathbb{R})$ (resp. $\Omega \in U_n(\mathbb{C})$, $S \in H_n^+(\mathbb{C})$). Il existe alors, dans $orb(A)$, un représentant symétrique positif (resp. hermitien).

3] Application aux drapeaux

[Isen]

Définition 11 : Un drapeau est une suite strictement croissante d'espaces vectoriels $\{0\} =: A_0 \subsetneq A_1 \subsetneq \cdots \subsetneq A_n =: E$. On note $\mathcal{D}$ l'ensemble des drapeaux de E.

Proposition 12 : Soit $(f_1; \cdots; f_n)$ base de E et $(F_i = Vect(f_1; \cdots; f_i))_{i=0}^{n}$

Alors : $d = (F_0; \cdots; F_n)$ est un drapeau de E.

Remarque 13 : En voyant $GL_n(\mathbb{K})$ comme l'ensemble des bases de E, on remarque que l'application $\varphi : \begin{array}{l} GL_n(\mathbb{K}) \to \mathcal{D} \\ (c_1 | \cdots | c_n) \mapsto (Vect(c_1; \cdots; c_i))_{i=0}^{n} \end{array}$ est surjective.

Définition 14 : Pour $e = (e_1; \cdots; e_n)$ base canonique de E, on note $\delta = \varphi(e)$ le drapeau canonique.

Proposition 15 : L'application $GL_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}$, $(A ; d=(F_0;\dots;F_n)) \mapsto A.d = (A(F_0);\dots;A(F_n))$ définit une action transitive de $GL_n(\mathbb{K})$ sur $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D} \simeq GL_n(\mathbb{K})/T_s$ avec T_s l'ensemble des matrices triangulaires supérieures de $GL_n(\mathbb{K})$.

[I sen]

Théorème 16 : (de Bruhat) $GL_n(\mathbb{K}) = \bigsqcup_{\sigma \in S_n} T_s P_\sigma T_s$ avec P_σ une permutation de la matrice identité.

Théorème 17 : Le nombre d'orbites de l'action de $GL_n(\mathbb{K})$ sur $\mathcal{D} \times \mathcal{D}$ est $n!$.

II] Action de $GL_n(\mathbb{K}) \times GL_m(\mathbb{K})$ sur $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ par équivalence

1] Matrices équivalentes et représentant simple

VI.2

Lemme 18 : Soit $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ et $r \in [\![0;\min(n;m)]\!]$.
Alors : A est de rang r ssi il existe $P,Q \in GL_n(\mathbb{K}) \times GL_m(\mathbb{K})$ tq :
$$A = P \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,m-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,m-r} \end{pmatrix} Q^{-1}$$

Définition / Théorème 19 : L'application $(GL_n(\mathbb{K}) \times GL_m(\mathbb{K})) \times \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$, $((P;Q);A) \mapsto PAQ^{-1}$ définit une action de $GL_n(\mathbb{K}) \times GL_m(\mathbb{K})$ sur $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ dont les orbites sont les $O_r := \{A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K}) \mid rg(A) = r\}$ pour $r \in [\![0;\min(n;m)]\!]$

[Rom]

Remarque 20 : On dit que le rang est un invariant total pour cette action.

Théorème 21 : Soit $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ de rang $r \geq 1$.
Alors : il existe $P,Q \in GL_n(\mathbb{K}) \times GL_m(\mathbb{K})$ produits de matrices élémentaires telles que $PAQ^{-1} = A_r := \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Remarque 22 : Un représentant simple de l'orbite de A est A_r.

2] Orbites et restriction à $O_n(\mathbb{R}) \times O_n(\mathbb{R})$ ou $U_n(\mathbb{C}) \times U_n(\mathbb{C})$

VI.2

Théorème 23 : Soit $r \in [\![0;\min(n;m)]\!]$. Le cardinal d'une orbite O_r pour l'action par équivalence sur $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{F}_q)$ est :
$$|O_r| = \frac{q^{\frac{r(r-1)}{2}}}{\prod_{k=1}^{r}(q^k-1)} \prod_{k=n-r+1}^{n}(q^k-1) \prod_{k=m-r+1}^{m}(q^k-1)$$

[Rom]

Théorème 24 : Les orbites pour l'action par équivalence sur $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{C})$ sont toutes connexes et l'adhérence d'une orbite O_r est $\bigcup_{s=0}^{r} O_s$.

VI.2 [Rom]

Théorème 25 : Deux matrices $A,B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (resp. $A,B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$) sont orthogonalement (resp. unitairement) équivalentes ssi les matrices ${}^tAA$ et ${}^tBB$ (resp. ${}^t\bar{A}A$ et ${}^t\bar{B}B$) ont les mêmes valeurs propres (resp. ont les mêmes valeurs singulières)

III] Action de $GL_n(\mathbb{K})$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ par conjugaison

1] Matrices semblables et conjugaison dans $\mathbb{C}$

VI.3

Définition / Théorème 26 : L'application $GL_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $(P ; A) \longmapsto P.A = PAP^{-1}$ définit une action de $GL_n(\mathbb{K})$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Deux matrices qui sont dans la même orbite pour cette action sont dites semblables ou conjuguées.

[Rom]

Proposition 27 : Deux matrices semblables sont équivalentes.

Remarque 28 : La réciproque est fausse.

Proposition 29 : Pour $\mathbb{K}$ algébriquement clos, deux matrices $A,B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont semblables ssi pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et $k \in \mathbb{N}^*$, les matrices $(A-\lambda I_n)^k$ et $(B-\lambda I_n)^k$ sont équivalentes.

Théorème 30 : Pour $\mathbb{K}$ algébriquement clos, toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est semblable à sa transposée.

2] Invariants de similitude et réduction de Frobénius

Annexe B

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

Proposition 31 : Soit $x \in E$ et $E_x := \{P(f)(x) \mid P \in \mathbb{K}[X]\}$
Alors : si P_x est le polynôme unitaire engendrant $\{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(f)(x) = 0\}$ alors E_x est un sous-espace vectoriel de E de dimension $\deg(P_x)$ dont une base est : $\{x; f(x); \dots; f^{\deg(P_x)-1}(x)\}$.

[GouA]

Proposition 32 : Il existe $x \in E$ tel que $P_x = \pi_f$

Définition 33 : On dit que f est cyclique s'il existe $x \in E$ tel que $E_x = E$.
Pour $P = X^p + a_{p-1}X^{p-1} + \dots + a_0 \in \mathbb{K}[X]$, on appelle matrice compagnon de P la matrice $C(P) = \begin{pmatrix} 0 & & (0) & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & 0 & \\ (0) & & 1 & -a_{p-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$

Proposition 34 : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ cyclique.
Alors : il existe une base de E $\mathcal{B}$ telle que $Mat_{\mathcal{B}}(f) = C(\pi_f)$

Annexe 3

Théorème 35 : Il existe une suite $F_1;\dots;F_r$ de sous-espaces vectoriels de E stables par f tels que $E = F_1 \oplus \dots \oplus F_r$, pour tout $i \in [\![1;r]\!]$, $f_i := f_{|F_i}$ est cyclique et $\pi_{f_i} = \pi_{f_{i}}$ divise $\pi_{f_{i-1}}$.

Définition 36 : La suite $P_1;\dots;P_r$ ne dépend que de f et est appelée suite des invariants de similitude de f.

[GouA1]

Théorème 37 : (réduction de Frobénius) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $P_1;\dots;P_r$ sa suite d'invariants de similitude.
Alors : il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $Mat_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} C(P_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & C(P_r) \end{pmatrix}$
et de plus $P_1 = \pi_f$ et $P_1 \times \dots \times P_r = \chi_f$

Application 38 : Deux endomorphismes $f,g \in \mathcal{L}(E)$ sont semblables ssi ils ont les mêmes invariants de similitude

3) Restriction à $SO_3(\mathbb{R})$ et quaternions

Partir de la représentation des quaternions en termes de matrices.

Définition 39 : Le corps gauche des quaternions est une $\mathbb{R}$-algèbre non-commutative de norme $N(q) = \sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}$ pour $q = a + ib + jc + kd$.

Propriétés 40 : Soit $Sp(1) = \{q \in \mathbb{H} \mid N(q) = 1\}$ et $q \in \mathbb{H}$.
Alors : (1) $2Re(q) = q + \bar{q}$ (4) $Z(\mathbb{H}) = \mathbb{R}$
(2) $\overline{q_1 q_2} = \bar{q_2}\,\bar{q_1}$ (5) $Z(\mathbb{H}) \cap Sp(1) = \{\pm 1\}$
(3) $N(q)^2 = q\bar{q}$

[Isen]

Lemme 41 : La sphère unité S^{n-1} de $\mathbb{R}^n$ est connexe par arcs.
En particulier, $Sp(1)$ est connexe par arcs.

Théorème 42 : (admis) $SO_3(\mathbb{R})$ est engendré par les retournements

Théorème 43 : $SO_3(\mathbb{R})$ est isomorphe à $Sp(1)/\{\pm 1\}$.

IV) Action de $GL_n(\mathbb{K})$ sur $S_n(\mathbb{K})$ par congruence

1) Matrices congruentes et formes quadratiques

VI.4

On suppose par la suite $\mathbb{K}$ désigne un corps de caractéristique différente de 2.

Définition/Théorème 44 : L'application $\begin{array}{ccc} GL_n(\mathbb{K}) \times S_n(\mathbb{K}) & \to & S_n(\mathbb{K}) \\ (P;A) & \mapsto & P.A = PA\,{}^tP \end{array}$ définit une action de $GL_n(\mathbb{K})$ sur $S_n(\mathbb{K})$.
Deux matrices dans la même orbite pour cette action sont dites congruentes.

[Rom]

Théorème 45 : (de réduction de Gauss) Soit φ forme quadratique sur $\mathbb{K}^n$.
Alors : il existe $(f_i)_{i=1}^n$ base de $\mathbb{K}^n$ telle que $Mat_{(f_i)}(\varphi) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$

VI.4

Corollaire 46 : Pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, deux matrices $A, B \in S_n(\mathbb{C})$ sont congruentes ssi elles ont même rang. Les orbites pour cette action sont :
$\mathcal{O}_r = \{A \in S_n(\mathbb{C}) \mid rg(A) = r\}$ avec $r \in [\![0;n]\!]$.

[Rom]

Théorème 47 : (de Sylvester) Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, deux matrices $A, B \in S_n(\mathbb{R})$ sont congruentes ssi elles ont même signature. Les orbites pour cette action sont $\mathcal{O}_{(s;t)} = \{A \in S_n(\mathbb{R}) \mid sign(\varphi) = (s;t)\}$ où φ est la forme quadratique associée à A, $s = \max\limits_{F \,\mid\, \varphi_{|F} \in S^{++}(F)} \{\dim(F)\}$, $t = r - s$ et $r = rg(A)$.

Remarque 48 : On dit que le rang (resp. la signature) ~~est~~ un invariant total pour l'action par congruence sur $S_n(\mathbb{C})$ (resp. $S_n(\mathbb{R})$)

2) Cas d'un corps fini

Théorème 49 : Pour $\mathbb{K} = \mathbb{F}_q$, deux matrices $A, B \in S_n(\mathbb{F}_q) \cap GL_n(\mathbb{F}_q)$ sont congruentes ssi elles ont même discriminant modulo les carrés de $\mathbb{F}_q^*$.

VI.4

Remarque 50 : On dit que le discriminant (modulo les carrés de $\mathbb{F}_q^*$) est un invariant total pour cette action.

[Rom]

Théorème 51 : Soit $\alpha \in \mathbb{F}_q^*$ non-carré et φ forme quadratique sur $\mathbb{F}_q^n$ de rang $r \in [\![1;n]\!]$.
Alors : il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{F}_q^n$ telle que $Mat_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} I_{r-1} & & \\ & \delta & \\ & & 0_{n-r} \end{pmatrix}$ avec $\delta \in \{1;\alpha\}$.

3) Étude de $O(p;q)$

Proposition 52 : $\exp : S_n(\mathbb{R}) \to S_n^{++}(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme

[H2G2]

Définition 53 : Soit $p,q \in \mathbb{N}^*$. On note $O(p;q)$ le sous-groupe de $GL_{p+q}(\mathbb{R})$ formé des isométries de la forme quadratique : $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{p+q} & \to & \mathbb{R} \\ (x_1;\dots;x_{p+q}) & \mapsto & x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_{p+q}^2 \end{array}$ de signature $(p;q)$ de matrice dans la base canonique $I_{(p;q)} := \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & -1 & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}$, i.e. $O(p;q) = \{M \in GL_{p+q}(\mathbb{R}) \mid M I_{(p;q)} {}^tM = I_{(p;q)}\}$

Théorème 54 : Soit $p,q \in \mathbb{N}^*$.
Alors : $O(p;q)$ et $O_p(\mathbb{R}) \times O_q(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{pq}$ sont homéomorphes.

Références :

[Rom] Mathématiques pour l'agrégation Algèbre et Géométrie – Rombaldi

[Isen] L'oral à l'agrégation de mathématiques – Isenmann

[GouAl] Les maths en tête Algèbre – Gourdon

[H2G2] Histoires hédonistes de groupes et géométrie – Caldero